ZUR

BESTIMMUNG VON TRÄGHEITSMOMENTEN DURCH SCHWINGUNGSVERSUCHE.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

UNIVERSITÄT WÜRZBURG

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

D. KREICHGAUER

AUS ROCKENHAUSEN.

LEIPZIG,

DRUCK VON METZGER & WITTIG.

1885.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549820_0176

I. Verschiedene Arten der Bestimmung.

Das Trägheitsmoment eines beliebig geformten Körpers durch Rechnung genau zu ermitteln, ist nicht möglich; wohl aber kann dasselbe durch das Experiment mit ziemlicher Schärfe auf einem Wege bestimmt werden, den Poisson[1]) vorgeschlagen hat. Als Gauss[2]) das Trägheitsmoment von Magneten zur Messung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus verwendete, führte er jenen Vorschlag in der bekannten, noch gebräuchlichen Form aus, indem er einen Magnet einmal allein, dann mit zwei auf scharfen Spitzen ruhenden Massen von bekanntem Trägheitsmoment schwingen liess. Die Art der Belastung hat mit der Zeit verschiedene Aenderungen erfahren, die Massen wurden von Weber[3]), statt sie auf Spitzen aufzusetzen, an Coconfäden gehängt, deren Abstand mit grösserer Genauigkeit und geringerer Mühe gemessen werden konnte, als die Entfernung zweier Spitzen.

Einige Beispiele älterer Bestimmungen nach dieser Methode mögen hier Platz finden.

W. Weber gibt in den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins 1837, p. 82, das Trägheitsmoment eines Stabes, der bei der ersten Bestimmung an

---

1) Lamont, Handbuch des Erdmagnetismus. p. 75.

2) Gauss, Intensitas vis etc.

3) Weber, Resultate a. d. Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1837. p. 82.

einem Seidenfaden, bei der zweiten an einem Metalldrahte von grosser Torsionskraft hing, an als:

1) 49 103 000 [mm² mg],
2) 49 004 000 [mm² mg],

während die Berechnung aus den Dimensionen den Werth 48 982 000 [mm² mg] lieferte. Die Schwingungsdauer des unbelasteten Stabes, auf gleiche Umstände reducirt, wird an derselben Stelle als Resultat aus 4 Beobachtungssätzen mitgetheilt; sie beträgt:

6,698 6,695 6,696 6,695 sec.

Der grösste Unterschied zwischen diesen Zahlen ist 3 auf 6700, oder 1 auf ca. 2230.

Nachdem zwei Cylindergewichte an Coconfäden an den Magnet gehängt waren, wurden aus 3 Sätzen die Schwingungsdauern gefunden:

12,058 12,039 12,019 sec.

mit der grössten Differenz von 39 auf 12040 oder 1 auf ca. 309. Gegenüber der guten Uebereinstimmung obiger 4 Werthe ist der Unterschied der drei letzteren ziemlich auffällig.

In der Schrift Intensitas vis etc. von Gauss findet sich ebenfalls ein Beispiel einer Trägheitsmomentbestimmung. Die Gewichte waren dort in vier verschiedenen Entfernungen nacheinander angehängt, in jeder der verschiedenen Stellungen wurde die Schwingungsdauer der Combination bestimmt, und mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate das Trägheitsmoment berechnet. Der gefundene Werth gestattete nun, rückwärts auszurechnen, wie gross die Schwingungsdauer bei den genannten 4 Stellungen hätte gefunden werden müssen. Das Resultat ist in der folgenden Tabelle enthalten:

Exper.	Tempus calculatum	Tempus observatum	Diff.
I	24,65884″	24,65717″	+0,00167″
II	20,78774	20,79228	−0,00454
III	17,69046	17,68610	+0,00436
IV	15,82805	15,82958	−0,00153

Ferner theilt Sartorius von Waltershausen in den Resultaten des magnetischen Vereins 1837, p. 99, eine ganz ähnliche Beobachtungsreihe mit, wie folgt:

Exper.	Berechnete Zeit in Sec.	Beobachtete Zeit in Sec.	Differenz Sec.	Gegenseitige Entfernung der Gew.
I	31,0169	31,0129	+0,0040	199,888 mm
II	25,6011	25,6317	−0,0306	150,0 „
III	20,8744	20,8433	+0,0311	100,0 „
IV	17,4347	17,4382	−0,0035	50,0 „

Auch Hansteen hat, wie er in den Resultaten von 1840 mittheilt, derartige Versuche angestellt, mit deren Ergebniss er gar nicht zufrieden war.

Da anzunehmen ist, dass nur gute Beobachtungen veröffentlicht wurden, so lässt sich aus den mitgetheilten Beispielen schliessen, dass einer oder mehrere principielle Fehler in der Methode liegen. Dieselben zu corrigiren oder zu umgehen, war der Hauptzweck gegenwärtiger Untersuchung.

Infolge der gemachten schlimmen Erfahrungen belastete Lamont[1]) und Gauss[2]) den schwingenden Magnet mit einem Ringe, dessen Mittelpunkt in die Aufhängeaxe fiel. Dadurch trat nun an Stelle des vermiedenen ein neuer Missstand, die nicht controlirbaren Dichteverschiedenheiten und, da ausserdem der Ring meistens aus Messing bestand, der dieses Metall häufig begleitende Magnetismus. Eine grössere Beobachtungsreihe nach dieser Methode gibt Wild.[3]) Für das Trägheitsmoment desselben Stabes, in längeren Intervallen bestimmt, sind dort die Zahlen angegeben:

71661	71632	71591	71524	71633	71632
71634	71653	71610	71596	71613	71617
71600	71577	71635	71600	71613	

Der grösste Unterschied zeigt sich zwischen dem ersten und vierten Werthe, er beträgt 137 auf 71660, oder 1 auf

1) Lamont, Abhandl. d. math.-phys. Cl. d. Kgl. bair. Acad. **3.** p. 621. 1843 u. Ueber das magnetische Observatorium an der K. Sternwarte bei München 1840.

2) Gauss, Resultate des magn. Vereins 1841, p. 26.

3) Wild, Exner's Rep. d. Physik. **20.** 1884. p. 12.

523, aber auch die übrigen Zahlen stimmen nur unvollständig überein, was vielleicht auf eine Unsicherheit in der nicht leichten Orientirung, oder auf Magnetismus des Ringes hinweist. Da überdies das berechnete Trägheitsmoment des Ringes mit einem constanten Fehler behaftet sein könnte, so sind auch in dieser Methode noch nicht alle Schwierigkeiten überwunden. In demselben Aufsatze weist Wild noch auf die Nothwendigkeit weiterer Untersuchungen mit den Worten hin:

„Eine aufmerksame Betrachtung der bezüglichen Gauss'schen, sowie ähnlicher Beobachtungen von Sartorius v. Waltershausen lässt indessen erkennen, dass die Bestimmung für die intermediären Entfernungen auffallend viel grössere Abweichungen zwischen Berechnung und Beobachtung ergeben, als die aus den extremen Stellungen abgeleiteten. Wir lassen es dahingestellt, ob dies auf eine ungenügende Theorie dieser Methode, welche allfällige aerodynamische und Reibungscorrectionen, sowie eigene Schwingungen der angehängten Gewichte nicht berücksichtigt, zurückzuführen sei oder nicht, jedenfalls fordert aber dieser Umstand zu eingehenderen Untersuchungen dieser Methode auf."

Eine andere schon von W. Weber gebrauchte Abänderung des Gauss'schen Verfahrens hat Dorn[1]) benutzt, welcher die Belastungscylinder auf Stifte feststeckt und die Schwingungsdauer der Combination bei zwei um 180° verschiedenen Stellungen der Belastung beobachtet. Auf die obere Fläche der Belastungscylinder ist je ein kleiner Kreis gezeichnet, dessen Mittelpunkt in der Umdrehungsaxe liegt. Gemessen wird der Abstand der auf der Centrale liegenden Punkte beider Kreise. Unter den bisher veröffentlichten Bestimmungen von Trägheitsmomenten geben die auf obigem Wege gefundenen Resultate Dorn die grösste Genauigkeit.

Eine von allen genannten verschiedene Methode beschreibt E. Brassinne.[2])

---

1) Dorn, Wied. Ann. **17.** p. 773. 1882.

2) E. Brassinne, Compt. rend. **95.** p. 446. 1882. Beibl. **7.** p. 158. 1883.

Im Gegensatze zu den früheren, bei denen Magnetismus oder Torsion als Directionskräfte dienen, wird hier die Schwerkraft benutzt. Ein leichtes Pendel ist am unteren Ende mit einer horizontalen Scheibe versehen und dient zur Aufstellung des Körpers, dessen Trägheitsmoment gemessen werden soll. Zu ermitteln sind dann folgende Stücke: die Masse des Pendels, die Lage seines Schwerpunktes, die Schwingungsdauer ohne und mit Belastung, die Masse des Versuchsgegenstandes, die Lage des Schwerpunktes in demselben und dessen Abstand von der Aufhängeaxe des Pendels. Von diesen werden die beiden letzten nur in seltenen Fällen und nur mit äusserster Vorsicht zu einer Genauigkeit gebracht werden können, welche die Sicherheit des Endresultates in gleichem Grade verbürgen, wie eine der anderen Methoden.

In der neuesten Zeit wurden die Bestimmungsarten durch eine von allen früheren ebenfalls principiell verschiedene Methode, die bifilare Methode[1]) von F. Kohlrausch vermehrt, welche den Zweck hat, die Unsicherheiten der Belastungsmethode zu umgehen. Zu bestimmen ist die Directionskraft einer weiten bifilaren Aufhängung, die Schwingungsdauer der Suspension mit und ohne Versuchsobject. Einen Magnet legt man in zwei um 180° verschiedenen Richtungen nacheinander ein.

Angaben über die Sicherheit der Ausmessung bifilarer Directionskräfte und die ganze Theorie der bifilaren Aufhängung finden sich in der Arbeit über die Bestimmung der Horizontalintensität.[2]) Einen weiteren experimentellen Beitrag liefern die später (p. 30) beschriebenen Versuche, welche zugleich aufs neue die Vortheile der Methode gegenüber den früheren erkennen lassen.

In England ist noch eine andere Form der Trägheitsmomentbestimmung im Gebrauche, deren Resultate unter sich wohl übereinstimmen mögen, die aber zur Erlangung genauer Werthe wenig geeignet sein dürfte. Es wird, nachdem die Schwingungsdauer eines Magnets für sich bestimmt

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **22.** p. 411. 1884 u. Gött. Nachr. 1883. p. 411.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **17.** p. 765. 1882.

ist, unter denselben ein Cylinder aus unmagnetischem Metalle horizontal und symmetrisch zur Schwingungsaxe aufgehängt und abermals die Schwingungsdauer gemessen. Da das Trägheitsmoment des Belastungscylinders durch Rechnung gefunden werden kann, so wird dasjenige des Magnets mit den dazu gehörigen Theilen in bekannter Weise erhalten.

II. Störungsgründe.

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Magnets nach der Gauss'schen Methode macht vier genaue Messungen erforderlich, eine Wägung, eine Abstandsmessung und zwei Schwingungsdauern. Die Sicherheit der Beobachtung von Schwingungsdauern ist leicht über die geforderte Grenze zu steigern, und der Fehler der Abstandsmessung kann durch sorgfältige Ausführung jedenfalls auch in den meisten Fällen bis zum nöthigen Betrage verringert werden. Obwohl aber gewiss alle Beobachter sämmtliche Stücke mit erforderlicher Genauigkeit gemessen haben, weichen doch die extremen Werthe bis $^1/_{300}$, in vereinzelten Fällen noch mehr voneinander ab. Dass das nach dieser Methode bestimmte Trägheitsmoment im Mittel auch noch zu gross ausfiel[1]), beachtete man früher nicht, wahrscheinlich weil das Resultat fast nie in anderer Weise controlirt wurde. Als Prof. Kohlrausch[2]), einen sehr genau cylindrisch gearbeiteten Stab untersuchte, dessen Trägheitsmoment auch aus der Form berechnete und es ausserdem durch seine Bifilarmethode bestimmte, machte er obige Bemerkung und veranlasste später diese Untersuchung.

Die Ursachen, welche das Trägheitsmoment zunächst ungenau zu machen geeignet sind, beeinflussen alle nur die Schwingungsdauer des belasteten Versuchsobjectes. Eine derselben hat Beling[3]) in einer neueren Schrift untersucht und dann gezeigt, dass die davon herrührenden Störungen, bei kurz aufgehängten Gewichten, mittelst einer einfachen Formel berücksichtigt werden können. Die dort behandel-

1) Beispiel p. 4 oben.
2) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1883. p. 411.
3) Beling, Zur Theorie der Bifilaraufhängung, Breslau 1881.

ten störenden Kräfte treten infolge der selbständigen Pendelschwingungen der aufgehängten Gewichte auf und sind um so grösser, je länger die Aufhängefäden sind. Rechnet man seine Formel, die für die Bewegung eines bifilar aufgehängten Systemes gilt, für den schwingenden Magnet oder das Torsionspendel um, so findet man, dass die beobachtete Schwingungsdauer T mit einem Factor zu multipliciren ist, um jene $\mathfrak{T}$ zu erhalten, welche mit fest verbundenen Gewichten, also ohne Eigenbewegung derselben, gefunden werden würde.

Bedeutet:

D die Directionskraft,
m die Masse eines Belastungsgewichtes,
$2r$ den Abstand der beiden Gewichte,
λ die reducirte Pendellänge derselben,
g die Beschleunigung der Schwere,
k das Trägheitsmoment des Schwingungskörpers,

so ist:
$$\mathfrak{T} = T\left(1 - \frac{Dmr^2\lambda}{g(k + 2mr^2)^2}\right).$$

Am Schlusse seiner Arbeit stellt Beling in einer Tafel die Resultate seiner Experimentaluntersuchungen zusammen, wobei eine auffallende Erscheinung auftritt, deren Ursache aus den mitgetheilten Erläuterungen über Messinstrumente und Messmethoden nicht erklärt werden kann. Ein bifilar aufgehängter Körper von bekanntem Trägheitsmoment und bekannter Masse schwingt bei einer Directionskraft, deren Grösse aus den Dimensionen des Apparates berechnet wird. Aus den beobachteten Daten wird dann die Schwerebeschleunigung bestimmt. Der grösste Unterschied zwischen den 47 in Betracht kommenden Resultaten beträgt ca. 0,000 007 des ganzen, zwischen den letzten 20 nur 0,000 002 des ganzen, während der Abstand der beiden Aufhängefäden nur auf ca. 0,00025 des ganzen Abstandes (3,3 mm) bestimmt werden kann. Dadurch allein würde aber schon in der Grösse g eine Unsicherheit von 0,0005 derselben bedingt sein.

Ausser der besprochenen lassen sich noch 2 Störungsursachen nachweisen, von denen die eine wie die frühere in

der Befestigung der Gewichte, die andere aber in der Aufhängung des ganzen Systemes begründet ist. Die erstere soll auf mathematischem Wege berücksichtigt, die letztere auf praktischem möglichst beseitigt werden.

In der Formel, welche das Trägheitsmoment darstellt, wird jenes der Hülfsbelastung angenommen als bestehend aus der Masse derselben, multiplicirt mit dem Quadrate ihrer Entfernung, ausserdem vermehrt um das Trägheitsmoment der Gewichte, bezogen auf die verticale Axe durch ihren Aufhängepunkt. Dieser letztere Theil würde aber nur dann ganz hierher gehören, wenn die Gewichte sich vollständig mit dem Magnete drehen müssten, d. h. wenn die Directionskraft der Aufhängefäden unendlich gross wäre.[1])

Schwingungen combinirter Pendel.

Die Bewegung des Magnets mit den Gewichten kann dreifacher Art sein, von diesen ist eine bei den wirklich vorkommenden Verhältnissen ausgeschlossen und eine andere oft zu vermeiden.

Um die drei möglichen Arten von Bewegungen anschaulicher zu machen, wollen wir statt des Torsionspendels zunächst zwei gewöhnliche Pendel betrachten, von denen eins am unteren Ende des anderen hängt. Die Schwingungen n solcher Pendel behandelt Daniel Bernoulli in dem Aufsatze: Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae.[2])

---

1) Einen ganz ähnlichen Gegenstand behandelt der Aufsatz von Lübeck „Notiz zu den Bessel'schen Pendelversuchen", Pogg. Ann. **150.** p. 476. 1873, wo der Einfluss der in den Bessel'schen Pendeln eingeschlossenen Flüssigkeit auf die Schwingungen derselben untersucht und die von Bessel gefundenen unregelmässigen Resultate berichtigt werden.

2) D. Bernoulli, Comm. Acad. sc. Petropolit. **6.** p. 108, 1738. — Ein besonderer Fall solcher Schwingungen hat schon Johann Bernoulli beschäftigt. Comm. Petrop. **3.** p. 13. 1732. Später hat Euler die Bernoulli'sche Arbeit zweifach erweitert. Comment. Petrop **8.** p. 30. 1741: „De oscillationibus fili flexilis quotcunque pondusculis onusti", und Acta acad. scient. imper. Petrop. **3.** 1779: „De motu oscillatorio mixto plurium pendulorum ex eodem corpore mobili suspensorum. Dasselbe Thema hat wieder Dumas in der Festschrift zur dritten

Erstens können jede beide Pendel gemeinsame Schwingungen von gleicher Dauer, aber ungleicher, von Masse und Länge derselben abhängiger Amplitude ausführen, wobei beide Pendel stets gleichzeitig die Ruhelage in gleicher Richtung passiren (I) Fig. 1. Die zweite Art unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass der Durchgang durch die Ruhelage wohl zu gleicher Zeit, aber in entgegengesetzter Richtung stattfindet (II). Fig. 2. Diese Bewegung hat stets eine kleinere Periode als die erste. Drittens können beide Pendel unregelmässig schwingen (III).

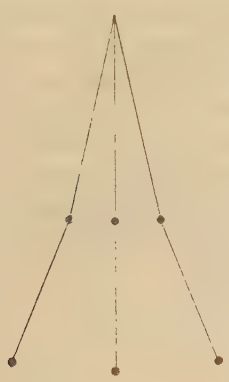

Fig. 1.

Fig. 2.

Den drei für gewöhnliche Pendel bestehenden Schwingungsformen ganz analoge lassen sich auch bei Torsionspendeln nachweisen, doch sind die Verhältnisse hierbei insofern allgemeiner, als zwei verschiedene Kräfte zu Direc-

---

Säcularfeier des Berliner Gymnasiums zum grauen Kloster aus anderen Principien behandelt und mehrfach ausgedehnt.

Ausserdem findet sich noch dieser Stoff in Lagranges mécanique analytique, bei Minding, Crelle's Journ. **50.** p. 243, 1855, bei E. Sang, Proc. Edinb. Roy. Soc. 1859—60, bei Jackwitz, die unendlich kleinen Schwingungen eines aus zwei Massenpunkten bestehenden Pendels (im Raume), Progr. des Posener Gymnasiums 1882, bei Luxenburg, Ueber das zweigliedrige Pendel (im Raume), Zeitschr. f. Mathematik. 28. p. 309. 1883 und bei Résal.

tionskräften verwendet sind, und weil die Ausschläge hier nicht, wie dort, auf sehr kleine beschränkt bleiben.

a) Schwingungen ohne beschränkende Voraussetzungen. — Das Torsionspendel mit zwei an gleichen, unbiegsamen, aber tordirbaren Fäden angehängten gleichen Belastungen kann man zunächst zu einem zweigliedrigen vereinfachen, indem man z. B. die Belastungen in ihren Schwerpunkten concentrirt denkt, sie also des Trägheitsmomentes um ihre verticale Axe beraubt und dafür die die jetzt gewichtslos gedachten Massen derselben zusammen in der Aufhängeaxe des Hauptkörpers an einem Faden befestigt, dessen Directionskraft doppelt so gross ist, als jene der beiden ursprünglichen war. Dass die so abgeänderte Combination ganz dieselben Schwingungen machen muss, wie die anfängliche, folgt aus dem Satze, dass Kräftepaare in ihrer Ebene beliebig verschoben werden dürfen.

Sind jetzt der Hauptkörper und die Belastung um irgend einen Winkel aus der Gleichgewichtslage gedreht, so wirken auf jenen 2 Kräfte, seine eigene Directionskraft und die Torsion des Fadens. Bedeutet also:

D die Directionskraft (entweder magnetisch oder von Torsion herrührend),

s die Trägheitsmomentensumme der beiden Belastungen um ihre Axe,

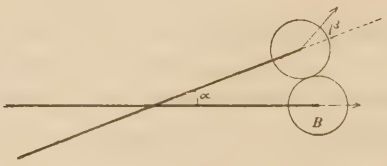

Fig. 3.

α den (für den Fall des Magnets kleinen) Winkel des Hauptkörpers gegen die Ruhelage, Fig. 3,

β den Winkel, um welchen die Belastung B gegen den Magnet gedreht ist,

Θ die doppelte Directionskraft eines Aufhängefadens der Gewichte,

K das Trägheitsmoment des Hauptkörpers,

$2l$ die Entfernung der beiden Aufhängefäden voneinander,

m die Massensumme beider Gewichte,

$S = K + ml^2$, $\varphi = \alpha + \beta$,

so kann man, ähnlich wie Euler in der citirten Schrift (p. 10) zur Definition der Bewegung, die Gleichungen aufstellen:

(1) $$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{D}{S}\alpha + \frac{\Theta}{S}\beta,$$

(2) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\Theta}{s}\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2\beta}{dt^2}.$$

Schreibt man statt der zweiten Gleichung die Differenz von (2) und (1), so entstehen die folgenden:

(3) $$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{D}{S}\alpha + \frac{\Theta}{S}\beta,$$

(4) $$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{D}{S}\alpha - \Theta\beta\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{s}\right).$$

Diese beiden Gleichungen haben dieselbe Form wie jene, welche die Bewegung eines Punktes unter dem Einfluss beliebig vieler Kräfte in der Ebene darstellen. Die beiden Gleichungen reduciren sich auf eine, wenn man (4) mit dem vorläufig unbestimmten Factor λ multiplicirt und dann von (3) subtrahirt.

(5) $$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \lambda\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{D}{S}\alpha(1+\lambda) + \Theta\beta\left[\frac{1}{S} + \lambda\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{s}\right)\right].$$

Durch Substitution von $\alpha = z + \lambda\beta$ folgt hieraus:

(6) $$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{D}{S}(1+\lambda)z + \beta\left[-\frac{D}{S}\lambda(1+\lambda) + \Theta\left(\frac{1}{S} + \lambda\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{s}\right)\right)\right].$$

Die Grösse λ, über die noch frei verfügt werden kann, werde jetzt so bestimmt, dass der Factor von β in Gleichung (6) verschwindet. Aus dieser Gleichung entsteht so:

(7) $$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{D}{S}(1+\lambda)z, \quad \text{mit der Lösung:}$$

(8) $$z = A\sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda)}}\sin\left[(t-B)\sqrt{\frac{D(1+\lambda)}{S}}\right] = \alpha - \lambda\beta.$$

Der Factor von β in (6) gleich 0 gesetzt, gibt 2 Werthe von λ:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{Ds - \Theta(S+s)}{2Ds}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Theta Ds^2}{[Ds - \Theta(S+s)]^2}}\right].$$

Infolge der beiden Werthe λ_1 und λ_2 spaltet sich Gleichung (8) in zwei:

$$\alpha - \lambda_1\beta = A_1\sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda_1)}}\sin\left[(t-B_1)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_1)}{S}}\right]$$

$$\alpha - \lambda_2\beta = A_2\sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda_2)}}\sin\left[(t-B_2)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_2)}{S}}\right].$$

Eliminirt man hier α und dann β, so entstehen die Gleichungen:

(9)
$$\left\{\alpha = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\sqrt{\frac{S}{D}}\left\{\frac{A_1\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1}}\sin\left[(t-B_1)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_1)}{S}}\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{A_2\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_2}}\sin\left[(t-B_2)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_2)}{S}}\right]\right\}\right.$$

(10)
$$\left\{\beta = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\sqrt{\frac{S}{D}}\left\{\frac{A_1}{\sqrt{1+\lambda_1}}\sin\left[(t-B_1)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_1)}{S}}\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{A_2}{\sqrt{1+\lambda_2}}\sin\left[(t-B_2)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_2)}{S}}\right]\right\}\right.$$

Die beiden letzten Gleichungen, welche im allgemeinsten Falle die Elongation des Hauptpendels und die der angehängten Gewichte für jeden Moment anzugeben gestatten, zeigen, dass von einer Schwingungsdauer im gewöhnlichen Sinne nicht die Rede sein kann. Die Bewegung der einzelnen Theile könnte verglichen werden mit jener einer aus 2 Wellen von verschiedener Länge zusammengesetzten Hauptwelle, deren graphische Darstellung die bekannte, oft fast regellos erscheinende Linie gibt. Nur wenn $\sqrt{1+\lambda_1}$ und $\sqrt{1+\lambda_2}$ commensurabel sind, entsteht in jedem Falle eine periodische Bewegung, weil dann nach einem gewissen constanten Zeitintervall beide der in (9) oder (10) enthaltenen Sinus wieder den gleichen Werth annehmen. Ertheilt man der Grösse Θ den Werth Null, so wird aus Gleichung (9):

$$\alpha = A_2\sqrt{\frac{S}{D}}\sin\left[(t-B_2)\sqrt{\frac{D}{S}}\right],$$

d. h. die Combination schwingt wie ein einfaches Torsionspendel mit dem Trägheitsmomente S.

Wächst Θ über alle Grenzen, dann entsteht aus (9) $\alpha = A_2\sqrt{(S+s)/D}\,\sin(t-B_2)\sqrt{D/S+s}$ das System schwingt

schwingt demnach wie ein Pendel mit dem Trägheitsmoment $K + ml^2 + s$.

Obgleich weder das Haupt- noch das Nebenpendel, wie die Betrachtung von α und β zeigt, eine Periode besitzen, so gibt es doch zwei Punkte in der Combination, die sich wie ein einfaches Pendel verhalten. Die beiden, entsprechend den 2 Werthen von λ, erhält man aus Gleichung (8). Da nämlich β den Winkel darstellt, um welchen eines der angehängten Gewichte gegen seine relative Ruhelage, also gegen die Richtung des Hauptkörpers gedreht ist, so gibt es auf dem Faden, an dem es hängt, oder auf dessen Verlängerung jedenfalls 2 Querschnitte, deren Drehung gegen jenen Körper $-\lambda\beta$ beträgt. Die ununbegrenzte Verlängerung nach oben und unten wird dabei so gedacht, dass der ganze Faden gleichmässig und in allen Theilen gleich dem wirklich vorhandenen Stück tordirt ist. Da die Drehung der genannten ausgezeichneten Querschnitte gegen den Hauptschwingungskörper $-\lambda\beta$ ist, dieser selbst aber gegen die eigene Ruhelage um α abweicht, so sind die Querschnitte im ganzen um $\alpha - \lambda\beta$ gedreht, und dieser Ausdruck hat nach (8) eine gewöhnliche Sinusperiode.

Würde man in einem der bezeichneten Querschnitte einen Spiegel mit dem Faden verbinden, so erhielte man die Schwingungsdauer desselben:

(Gl. 8) $$T' = \pi \sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda)}},$$

ausserdem ist bekannt die Schwingungsdauer ohne Belastung:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}},$$

woraus K durch Elimination von D mittelst einer quadratischen Gleichung berechnet werden kann.

Leichter lässt sich dieselbe Erscheinung bei zwei combinirten ebenen Pendeln verfolgen. Auch hier besteht, wie man aus einer der p. 10 citirten Schriften, z. B. der von Dumas, ersehen kann, zwischen dem Winkel des Hauptpendels α (Fig. 3) und dem des Nebenpendels gegen das Hauptpendel β eine Beziehung von der Form:

$$\alpha + m_1 \beta = m_2 \sin m_3 t,$$

wenn m_1 bis m_3 Constante sind. In Fig. 4 sei AC zu irgend einer Zeit die Lage des Hauptpendels, FC für denselben Augenblick die Richtung des angehängten Pendels, $\measuredangle CAD = \alpha$, $\measuredangle BCE = \beta$, $\measuredangle BAD = \alpha + m_1\beta$, $\measuredangle BAC = m_1\beta$.

Fig. 4.

In dem Dreieck ABC verhält sich dann:

$$BC : AC = \sin m_1\beta : \sin(\beta - m_1\beta)$$

oder für kleine Winkel β:

$$BC : AC = m_1 : 1 - m_1,$$

d. h. BC ist eine Constante, da sämmtliche anderen Glieder der Proportion ebenfalls Constante sind; dies gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt während der Schwingungen. Daraus folgt, dass die Linie AB immer denselben Punkt in der Richtung des Nebenpendels CF trifft, und da AB nach obiger Gleichung Sinusperioden hat, so hat auch die Bewegung des Schnittpunktes B solche. Der Punkt B kann bei passender Wahl der Dimensionen beider Pendel natürlich auch zwischen C und F fallen.

b) Regelmässige Schwingungen. — Der Unterschied dieser gegen die unregelmässigen besteht, wie aus p. 11 ersichtlich ist, darin, dass beide Pendel stets gleichzeitig die Ruhelage passiren. Es muss demnach zwischen den Winkeln der beiden gegen die Ruhelage α und β eine Beziehung bestehen, welche diese Bedingung enthält und zugleich den beiden Gleichungen (3) und (4) nicht widerspricht. Die einfachste derartige Beziehung ist $\beta = c\alpha$, wo c eine vorläufig unbestimmte Constante ist.

Die Bewegung wird jetzt durch die 3 Gleichungen bestimmt:

(a) $$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{D}{S}\alpha + \frac{\Theta}{S}\beta$$

(b) $$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{D}{S}\alpha - \Theta\beta\left[\frac{1}{S} + \frac{1}{s}\right], \qquad (c) \quad \beta = c\alpha.$$

Die erste und letzte Gleichung liefern die Beziehung:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha\left[-\frac{D}{S} + \frac{c\Theta}{S}\right]$$

mit der Lösung:

$$\text{(d)} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{n_1 S}{D - c\Theta}} \sin\left[(t - n_2)\sqrt{\frac{D - c\Theta}{S}}\right],$$

n_1 und n_2 sind Integrationsconstanten.

Die vorläufig unbestimmte Grösse c folgt aus den Gleichungen (a), (b) und (c) durch Elimination von α und β als:

$$\text{(e)} \qquad c = \frac{Ds - \Theta(S+s)}{2\Theta s}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Theta D s^2}{[Ds - \Theta(S+s)]^2}}\right].$$

Die Constante c ist zugleich das Verhältniss der Ausschlagsweiten beider Pendel. Durch Vergleichung derselben mit der Constanten λ p. 14 folgt:

$$\text{(f)} \qquad c\Theta = -\lambda D.$$

Die Dauer der regelmässigen Schwingungen erhält man aus Gleichung (d), sie ist:

$$T' = \pi\sqrt{\frac{S}{D - c\Theta}}.$$

Ersetzt man hierin $c\Theta$ der Gleichung (f) gemäss durch $-\lambda D$, so geht die Beziehung für die Dauer der regelmässigen Schwingungen in jene für die ausgezeichneten Punkte bei unregelmässigen (p. 15) über. Daraus geht hervor, dass die beiden Punkte unter allen Umständen eine constante Schwingungsdauer besitzen.

Ebenso wie auf p. 15 könnte jetzt das Trägheitsmoment K des Hauptpendels einer beliebig gegebenen Combination aus regelmässigen Schwingungen gefunden werden.

c) Dreigliedriges Pendel. — Bisher war stets vorausgesetzt, dass die beiden an das Hauptpendel angehängten Gewichte gleiche Schwingungsdauer um ihre Axe besitzen, und infolge dessen konnten sie als ein einziges betrachtet werden. In praktischen Fällen ist diese Gleichheit der Schwingungsdauern nur schwer erfüllbar, und es ist deshalb von grossem Vortheil, dass auch ohne dieselbe alles Frühere Geltung hat, wenn man nur aus den beiden Torsionsdirectionskräften der Aufhängefäden das arithmetische Mittel nimmt. Aus den 3 Differentialgleichungen für das dreigliedrige Pendel kann dieses in einfacher Weise geprüft werden. Insbesondere ist sofort ersichtlich, dass ungleiche

Schwingungsdauern der beiden Gewichte um ihre Axe unmöglich die Aufhängeaxe des Magnets aus ihrer Lage bringen können, da jedes Drehungsmoment für sich allein schon ein Kräftepaar und zwar unter allen Umständen nur ein solches bedingt.

Nicht so einfach ist die Sachlage für die gewöhnlichen Pendelschwingungen der angehängten Gewichte, welche Beling (s. p. 8) behandelt hat, indem verschiedene Schwingungsdauern derselben hier zu bedeutenden Störungen Veranlassung geben können, so lange die Drehungsaxe des Hauptschwingungskörpers nicht unveränderlich gemacht wird. Solche Schwingungen sind die zweite der auf p. 9 erwähnten Hauptursachen fehlerhafter Bestimmungen des Trägheitsmomentes, indem sie nicht nur direct die Schwingungsdauer beeinflussen, sondern auch den Schwerpunkt des Magnets hin und her stossen. Es ist auch hierdurch besonders die Erscheinung zu erklären, dass unter Beibehaltung der gleichen Verhältnisse verschiedene Schwingungsdauern erhalten werden, insbesondere, wenn man zwischen 2 Beobachtungssätzen den Magnet beruhigt und ihn dann von neuem, etwas rascher oder langsamer wie vorher, wieder anstösst. Warum der Schwerpunkt mit bewegt wird, ist in dem Falle leicht zu sehen, wo die Pendelschwingungen der Gewichte, auch bei Aufhängung an gleichlangen Fäden, unregelmässig ausgeführt werden. In diesem Falle greifen ja nicht mehr Kräftepaare an dem Magnet an, sondern den unregelmässigen, selbständigen Schwingungen entsprechend greifen an beiden Enden des Magnets in jedem Augenblicke von einander unabhängige verschiedene und verschieden gerichtete Kräfte an, die sich immer in ein Kräftepaar und eine einseitig angreifende Kraft zerlegen lassen. Ungleiches Gewicht der beiden angehängten Massen, sowie ungleicher Abstand vom Aufhängepunkte vergrössern das Uebel. Haben die Aufhängefäden auch noch ungleiche Länge, so treten die einseitigen Kräfte in jedem Falle auf, auch bei einer der mit I und II p. 11 bezeichneten Schwingungsformen. Aus den Resultaten der Untersuchungen Euler's (p. 10) geht nämlich hervor, dass die Amplituden zweier ungleich langer,

an demselben Punkte des Hauptpendels befestigten Nebenpendel von gleicher Masse ungleich sind. Auch aus der regelmässigen Schwingungsart dreier Pendel lässt sich durch einfache Schlüsse dieselbe Thatsache folgern. Haben aber beide angehängte Gewichte verschiedene reducirte Pendellängen, folglich verschiedene Amplituden, so können die auftretenden Kräfte wieder kein reines Kräftepaar bilden. Die Störungen wären natürlich am grössten, wenn man einem der Gewichte die Pendellänge Null, dem anderen eine endliche zutheilen würde.

III. Vereinfachung der Gleichungen durch passend gewählte Verhältnisse.

a) Unregelmässige Schwingungen. — Bestimmt man das Trägheitsmoment eines Magnets, so kann das der angehängten Cylinder um ihre Axe (s) immer bedeutend kleiner gemacht werden, als die Summe S, und auch die Regulirung der Torsionskraft Θ bietet keine Schwierigkeiten. Bei passender Wahl dieser Grössen werden sowohl Beobachtung als Rechnung bedeutend einfacher. Während aus Gleichung (9) im allgemeinen Falle eine einigermassen leicht beobachtbare Schwingungsdauer gar nicht erhalten werden konnte, ist dieselbe für ein kleines λ_1 oder λ_2 äusserst einfach. Ist z. B. λ_1 gegen λ_2 klein, was durch die Kleinheit des Ausdruckes 14 $\Theta D s^2 / [Ds - \Theta(S+s)]^2$ (p. 14) bedingt ist, so hat der zweite Sinus in Gleichung (9) entsprechend einen kleinen Einfluss auf die Periode von α. Die beobachtete mittlere Schwingungsdauer T' des Magnets kann man deshalb gleichsetzen:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda_1)}} = \pi \sqrt{\frac{K + ml^2}{D(1+\lambda_1)}}.$$

Die Schwingungsdauer ohne Belastung ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}},$$

aus diesen beiden findet man durch Eliminiren von D:

$$K = ml^2 \frac{T^2}{T'^2(1+\lambda_1) - T^2}, \tag{13}$$

oder angenähert, wenn $ml^2 + s = k$:

$$K = (ml^2 - \lambda_1 S)\frac{T^2}{T'^2 - T^2} = (k - \lambda_1 S - s)\frac{T'^2}{T'^2 - T^2}.$$

(Wird die Torsionskraft $\Theta = 0$, so wird auch $\lambda_1 = 0$ und $K = ml^2\, T^2/(T'^2 - T^2)$, worin das Trägheitsmoment der Gewichte um ihre Axe (s) ganz fehlt.)

Sind Θ und D nicht sehr viel voneinander verschieden, so genügt schon zu demselben Zwecke, dass s/S eine kleine Grösse ist. Für beide bezeichneten Fälle wird auch der allgemeine Ausdruck für λ_1 zur Ausrechnung bequemer, indem angenähert entsteht:

$$\lambda_1 = \frac{\Theta s}{Ds - \Theta(S + s)}.$$

Diese Form von λ_1, sowie die Gleichung (13) sind bei der Berechnung der angestellten Versuche benutzt worden.

b) Regelmässige Schwingungen (p. 16). — Dieselben entstehen, wenn man den Ablenkungen α und β von Haupt- und Nebenpendel das Verhältniss $1 : c$ ertheilt, beruhigt und von dieser Lage aus die Bewegung beginnen lässt. Da dieses für die Combination, wie sie zur Bestimmung von Trägheitsmomenten dient, kaum auszuführen ist, so scheint es, als ob diese Schwingungsform für solche Messungen keine Bedeutung hätte. Doch hat schon Daniel Bernoulli die Bemerkung gemacht, dass regelmässige Schwingungen auch entstehen — jedenfalls nur infolge der Reibung an den Aufhängepunkten und in der Luft —, wenn die dazu nothwendigen Bedingungen nur annähernd erfüllt sind. Dass das Gleiche auch von Torsionspendeln gilt, davon habe ich mich durch Versuche überzeugt.

Bei der zu Trägheitsmomentbestimmungen gebräuchlichen Pendelcombination ist es nun oft ohne viele Vorbereitungen möglich, die Bedingungen regelmässiger Schwingungen annähernd zu erfüllen, nämlich immer dann, wenn das Verhältniss der Ausschläge des zweiten Pendels zum ersten c:

$$c = \frac{-\Theta(S + s) + Ds}{2\Theta s}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Theta D s^2}{[Ds - \Theta(S + s)]^2}}\right]$$

recht klein ist. In diesem Falle ist es hinreichend, nur das Hauptpendel abzulenken und nach Beruhigung des Ganzen wieder loszulassen.

Wie früher λ, so wird auch hier c sich einfacher darstellen, wenn $4\Theta D s^2/[Ds - \Theta(S+s)]^2 = \delta$ eine kleine Zahl wird:

$$c_1 = \frac{-Ds}{Ds - \Theta(S+s)}; \quad c_2 = \frac{-\Theta(S+s)+Ds}{\Theta s}\left[1 + \frac{\Theta D s^2}{[\Theta(S+s)-Ds]^2}\right].$$

Sind Θ und D nicht viel verschieden, so wird für kleines s/S sowohl δ als c_1 eine kleine Zahl.

Das Trägheitsmoment des Hauptpendels findet sich hier, wie auch sonst immer, aus den beiden Gleichungen für die Schwingungsdauer mit und ohne Belastung:

$$T' = \pi\sqrt{\frac{S}{D - c_1\Theta}} \quad \text{und} \quad T = \pi\sqrt{\frac{K}{D}},$$

durch Eliminirung von D, unter Berücksichtigung der Beziehung $S = K + ml^2$ als:

$$K = ml^2 \frac{T^2}{T'^2\left(1 - c_1\frac{\Theta}{D}\right) - T^2}; \tag{14}$$

näherungsweise findet man auch die Beziehung:

$$K = [ml^2 + s(1 + c_1)]\frac{T^2}{T'^2 - T^2} = (k + c_1 s)\frac{T^2}{T'^2 - T^2}.$$

Die zur Berechnung von c_1 dienende Grösse S braucht natürlich nicht genau bekannt zu sein.

IV. Versuche.

Gegenstand der vielfachen Versuche waren zwei möglichst sorgfältig cylindrisch abgedrehte Magnete,

deren	Länge . .	16,009 cm	und	20,006 cm
„	Durchmesser	1,48 „	„	1,52 „
„	Masse . . .	216,13 g	„	279,96 g

betrug. Ihr magnetisches Moment war im Mittel:

5000 [cm, g] und 7240 [cm, g].

Der Umfang des längeren Stabes wurde an vier gleichweit voneinander entfernten Stellen mittelst eines sehr dünnen Drahtes gemessen, welcher zehnmal um den Magnet geführt war. Dadurch wurde gefunden, dass der Durchmesser desselben vom Südpol gegen den Nordpol wächst, und zwar von der ersten zur zweiten Messstelle um 0,0021 cm, von der zweiten zur dritten um 0,0016 cm, von der dritten zur vierten um 0,0054 cm. Der kürzere Stab war vor einem Jahre nach den Vorschriften von Strouhal und Barus magnetisirt, der längere kurz vor seiner Verwendung in gleicher Weise. Durch die in der Mitte durchbohrten Magnete wurde ein Kupferstift gesteckt, der an einem 265 cm langen, 0,010 cm dicken harten Messingdraht mit dem Torsionscoëfficienten 0,002 angelöthet war.

Die 3 Paare der zur Belastung dienenden Kupfergewichte waren Cylinder:

Nr.	Masse m	Radius ϱ	Höhe	Trägheitsm. $\frac{1}{2} m \varrho^2$
I	98,135 g	0,692 cm	3,7 cm	23,5 [cm, g]
II	200,437 „	0,692 „	7,5 „	48,0
III	193,105 „	0,945 „	3,8 „	86,2

Da verarbeitetes eisenfreies Kupfer bis vor kurzem ziemlich selten war, so wurden die sechs Belastungscylinder auch auf Magnetismus geprüft. Als ein zu solchen Prüfungen vorzüglich geeignetes Instrument wurde das transportable Intensitäts-Bifilarvariometer[1]) benutzt, indem ein Magnetende dem vorderen Glasverschluss durch Drehung am Torsionskopfe möglichst genähert, und dann der zu prüfende Körper von aussen bis zum Glase geschoben wurde; dabei ändern die meisten Körper die Einstellung des Magnets. Es gaben die beiden Cylinder I diamagnetische Ablenkung von 0,2 Scalentheilen, die Gewichte II magnetische von 4,4 Scalentheilen, die Gewichte III magnetische von 4 Scalentheilen, während 1 mg Eisen von etwa 1 mm Länge aus derselben Entfernung den Magnet um 800 Sca-

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **15.** p. 533. 1882.

lentheile ablenkte. Um auch noch das Moment des in den Kupfergewichten während der Trägheitsmomentbestimmung inducirten Magnetismus kennen zu lernen, wurde auf Vorschlag von Prof. Kohlrausch eine Methode benutzt, die hier wie bei ähnlichen Zwecken vollständig zum Ziele führt. Eine Magnetnadel wurde durch einen Ablenkungsstab und durch denjenigen Magnet, dessen Trägheitsmoment mittelst der Gewichte gemessen war, senkrecht zum magnetischen Meridian abgelenkt. Darauf wurden die Gewichte II in einem Abstande von 14 cm von der Nadel ungefähr in die Lage gebracht, die sie während der Schwingungsbeobachtungen bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes einnehmen. Die Nadel änderte dadurch ihre Einstellung um ungefähr 0,1 Scalentheil, indessen ein Stab mit dem Magnetismus 5000 [cm g] aus 1 m Entfernung um 70 Scalentheile ablenkte. Daraus lässt sich das magnetische Moment eines Gewichtes auf 0,02, beider Gewichte zusammen von 0,04 [cm, g] schätzen, ein Betrag, der auf die letzte berechnete Stelle des Trägheitsmomentes keinen Einfluss mehr hat. Die Kupfercylinder wurden mittelst verschieden dicker (0,06 bis 0,18 mm) weicher Messingdrähte an den Magnet gehängt, über dessen Enden zur Verhütung des Anstreifens der Drähte vorspringende leichte Kupferkappen steckten.

Der Abstand beider Fäden wurde durch einen Comparator mit zwei Mikroskopen ermittelt. Die beiden letzteren besassen ca. 0,1 mm Theilungen, und wurden auf die Fäden mit bestimmten Strichen eingestellt, deren Abstand nachher durch Visiren nach einem Normalmeter gemessen wurde.

Genauigkeitsgrenzen. Trägheitsmomente von Magneten werden meistens zum Zwecke der Messung der erdmagnetischen Horizontalintensität gesucht. Will man diese letztere, wie manche beabsichtigen, bis auf $\pm$ 0,0001 des ganzen Werthes (ungefähr den Betrag, welcher im Durchschnitt bei Bifilarvariometern als Scalenwerth verwendet wird), genau kennen, so darf das Trägheitsmoment des schwingenden Stabes höchstens $\pm$ 0,0002 Fehler besitzen. Dieses Trägheitsmoment wird nun erhalten aus der Gleichung:

$$K = k \frac{t^2}{t'^2 - t^2},$$

t ist die Schwingungsdauer des Magnets allein,

k das hinzugefügte Trägheitsmoment,

t' die Schwingungsdauer nach Vermehrung des Trägheitsmoments.

$$k = m(l^2 + \tfrac{1}{2}r^2),$$

m die Masse beider Belastungscylinder zusammen,

l deren halber Abstand,

r deren Radius.

$\log K = \log k + \log t^2 - \log(t'^2 - t^2)$, durch Differentiren:

$$\frac{dK}{K} = \frac{dk}{k} + 2\frac{dt}{t}\frac{t'^2}{t'^2 - t^2} - 2\frac{dt'}{t'}\frac{t'^2}{t'^2 - t^2}.$$

Ist noch r klein gegen l, und $(dm/m) = 0$, so wird nahezu:

$$\frac{dK}{K} = 2\frac{dl}{l} + 2\frac{dt}{t}\frac{t'^2}{t'^2 - t^2} - 2\frac{dt'}{t'}\frac{t'^2}{t'^2 - t^2}.$$

Bei den beiden in Frage kommenden Magneten war die Grösse $2t'^2\ (t'^2 - t^2)$ zwischen 2,7 und 3,9. Aus einigen Probebeobachtungen kann dt/t und dt'/t' auf etwa $\pm 0{,}00003$, und dl/l auf $\pm 0{,}00005$ geschätzt werden, wenn dl, dt und dt' die Fehler von l, t und t' bezeichnen. Daraus ergibt sich das Verhältniss des wahrscheinlichen Fehlers von K zu K selbst:

$\pm 0{,}00015$ im günstigeren Falle, und

$\pm 0{,}00019$ im ungünstigeren Falle $\left(\text{für } 2\frac{t'^2}{t'^2 - t^2} = 3{,}9\right)$.

Ausschliessung einiger möglichen Störungsursachen. Da nach Beseitigung der bis auf p. 9 und 10 besprochenen Fehlerquellen durch Aufhängung der Gewichte an Drähte von grosser Torsionskraft und Berücksichtigung der selbständigen Schwingungen derselben sowohl um ihre Axe, als auch um den Aufhängepunkt, die Unterschiede der einzelnen Werthe grösser blieben, als erwartet worden war, so wurden mögliche störende Einflüsse für sich untersucht.

Luftstörungen. Um zu entscheiden, ob die niemals ganz zu vermeidenden Luftströmungen die Schwingungsdauer merkbar beeinflussen, liess man den unbelasteten Magnet bei

geschlossenem und dann bei ganz offenem Kasten schwingen. Die beiden wiederholt erhaltenen Resultate waren aber nur um die gewöhnlichen Beobachtungsfehler verschieden. Versuche über den Einfluss von Luftströmungen auf einen schwingenden Körper wurden in neuerer Zeit von Braun[1]) angestellt. Die durch den Schwingungskörper verdrängte Luft hat nur bei Schwingungen in nicht horizontaler Ebene einen Einfluss, die durch denselben mitbewegte Luft müsste durch besondere Versuche, wie Bessel in seinem Werke über das Secundenpendel gezeigt hat, eliminirt werden. In den meisten Fällen von Trägheitsmomentbestimmungen, besonders von Magneten, ist der davon herkommende Einfluss wegen der geringen Ausdehnung und der kleinen Geschwindigkeit jedenfalls sehr gering, wie auch aus den Versuchen von E. Bödeker[2]) hervorgeht. Lamont[3]) schliesst aus Beobachtungen, die er gemeinsam mit Kuhn gemacht, dass eine Luftschicht von 4 mm Dicke an dem Magnet hängend gedacht werden müsse. In neuester Zeit hat noch Baille[4]) sich mit dem Einfluss der Luft, — deren Temperatur und Druck variirt wurde — auf einen schwingenden Körper beschäftigt.

Bei den hier mitgetheilten Versuchen wurde der Einfluss der Luft vernachlässigt, da derselbe nicht durch specielle Untersuchung nachgewiesen ward, und da aus den Versuchen Bödeker's auf die Geringfügigkeit desselben geschlossen werden kann.

Logarithmisches Decrement. Ebenso wenig konnte ungleichmässig sich ändernde Dämpfung Störungen von dem erhaltenen Betrage verursachen, indem die vielen, auf längere Zeit ausgedehnten Versuche das logarithmische Decrement des unbelasteten Magnets fast constant erscheinen liessen (0,00040 bis 0,00043). Viel grössere Unterschiede zeigte es aber bei den Schwingungen mit Belastung sowohl innerhalb

1) Braun, Exner's Repert. d. Physik. **20.** p. 821. 1884.

2) E. Bödeker, Versuche zur Bestimmung des Luftwiderstandes bei kleinen Geschwindigkeiten. Göttingen 1881.

3) Lamont, Pogg. Ann. **71.** p. 124. 1847.

4) Baille, Compt. rend. **96.** p. 1493. 1883.

derselben Beobachtungsreihe, als auch besonders von einer zur anderen. Die einzelnen Bestimmungen mit Gewichten II gaben Werthe zwischen 0,00068 bis 0,00086, mit Gewichten I von 0,00052 bis 0,00065.

Von Interesse sind noch die Erscheinungen, die dann auftreten, wenn die Belastungscylinder ungefähr gleiche eigene Schwingungsdauer um ihre Axe besitzen, wie der belastete Magnet. z. B. wurde mit Gewichten III als logarithmisches Decrement gefunden 0,0035 bis 0,0008, während die Schwingungsdauer von kleineren zu grösseren Werthen anstieg:

Aus	23	Schwingungen	13,100 Sec.
„	28 folg.	„	13,136 „
„	28 „	„	13,154 „
„	28 „	„	13,170 „
„	64 „	„	13,179 „

Bei diesem Versuche war der Magnet, um ihn in Bewegung zu setzen, durch einen zu ihm senkrechten Stab abgelenkt, dann beruhigt und plötzlich losgelassen worden.

Electricität. Hängen die Gewichte an Seidenfäden, so wäre es nicht unmöglich, dass dieselben während der Bewegung electrisch werden und infolge dessen die Schwingungsdauer beeinflussten, aber auch hier ergab die Untersuchung ein negatives Resultat.

Inconstanz des Stabmagnetismus. Da möglicherweise der Magnetismus des Schwingungsstabes während der mit ihm vorgenommenen Manipulationen etwas variabel sein könnte, besonders wenn er, wie hier, längere Zeit im magnetischen Meridian hängt, und dadurch eine kleine Verstärkung durch Induction erfahren konnte, so ward die Constanz auf zweierlei Weise geprüft. Einmal lenkte der gut befestigte Magnet aus grosser Nähe die Nadel eines Magnetometers ab, während er durch schwache Schläge erschüttert wurde. Dabei blieb die Nadeleinstellung constant. Nachdem der Stab wieder mehrere Tage die Richtung des Meridians hatte, ward seine Schwingungsdauer gemessen und nach einigen kleinen Stössen abermals. Für die gleiche Anzahl Schwingungen, auf gleiche Verhältnisse reducirt, ergaben sich

die Zeiten: 1758,45 und 1758,50 Sec. Die Constanz lässt nichts zu wünschen übrig.

1) Trägheitsmoment des kleinen Magnets.

a) Gauss'sche Methode. Die Messungen wurden mit allen von Gauss angegebenen und von Goldschmidt[1]) mitgetheilten Vorsichtsmaassregeln ausgeführt. Die Intensitätsvariationen gab das transportable Bifilarvariometer (p. 22), die Schwankungen des Stabmagnetismus mit der Temperatur wurden aus dem Temperaturcoëfficienten berechnet, der für den kleinen, resp. grossen Stab 0,00050 und 0,00045 beträgt.

Die Gewichte waren, um einen grossen Werth von Θ und darum geringe Correction zu erzielen, an (weichen) Messingdraht von 0,007 bis 0,018 cm Dicke aufgehängt. Das Trägheitsmoment wurde aus Gleichung (13) p. 19 und (14) p. 21 berechnet, da die Constante λ_1 sehr klein war.

Tabelle 1.

Versuche mit Gewichten an Metalldrähten.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$k_{[cm, g]}$	$K_{[cm, g]}$	d	δ	$l_{(cm)}$	Drahtdicke cm	T sec	Nr. der Gewichte
8,040	10,5107	6,8752	6367,9	4671,0	−1,2	+1,5	2,0	0,007	1,0	I
8,036	10,5216	6,8867	6361,0	4677,5	+5,3	1,5	2,1	0,007	1,0	I
8,0567	10,6223	6,9399	6394,7	4671,1	−1,1	1,4	3,2	0,018	0,4	I
8,0547	10,6190	6,9378	6390,9	4668,5	−3,7	1,3	2,1	0,013	0,5	I
8,0702	13,4357	6,9354	13103,0	4673,6	+1,4	1,3	3,0	0,018	0,5	II
8,0551	10,6170	6,9361	6392,4	4673,8	+1,6	1,4	3,2	0,013	0,8	I
8,0498	13,4007	6,9314	13036,2	4670,9	−1,3	1,4	3,2	0,013	1,0	II
8,0510	10,6137	6,9377	6392,9	4671,9	−0,3	1,3	2,8	0,013	0,6	I
8,0472	13,4140	6,9397	13027,0	4669,9	−2,3	1,5	3,3	0,013	0,9	II
8,0710	10,6314	6,9408	6416,6	4675,1	+2,9	1,4	2,8	0,013	0,7	I
8,0468	13,4104	6,9384	13027,6	4670,9	−1,3	1,4	2,8	0,013	1,0	II
			Mittelwerth	4672,2						

In der vorstehenden Tab. 1 ist

r der halbe gemessene Abstand der beiden Drähte, an denen die Gewichte hingen,

t' die Schwingungsdauer mit Belastung,

t die Schwingungsdauer ohne Belastung,

K das corrigirte Trägheitsmoment des Magnets mit Aufhängestift und Spiegel nach Abzug der Kappen [92,6] p. 23.

1) Goldschmidt, Resultate des magnet. Vereins 1840. p. 131.

δ die Differenz zwischen dem Trägheitsmomente K und dem aus der gebräuchlichen Rechnungsform hervorgehenden,

d die Abweichung vom Mittelwerthe,

l die Länge des Aufhängedrahtes beider Gewichte.

T die Schwingungsdauer der Gewichte um ihre Axe.

k p. 24.

Zur besseren Erkenntniss der aus Abänderung verschiedener Bestimmungsmittel hervorgehenden Gesetzmässigkeiten werden die Mittelwerthe gebildet:

	Trägheitsmoment Magnet allein
Gewichte I . . .	4672,40
„ II . . .	4671,03
Draht 0,018 cm . .	4672,05
„ 0,013 „ . .	4671,27
„ 0,007 „ . .	4673,95

Versuche mit Gewichten an Seidenfäden. Eine Messung wurde mit an Seidenfäden hängenden Gewichten ausgeführt und gab:

r	t'	t	K'	K	l cm	T	Nr. der Gewichte
8,0336	13,1939	6,9360	4701,0	4671,6	3,0	38	III

K' ist nach der gewöhnlichen Formel ohne Correction (p. 24) berechnet, in K ist der Einfluss der Torsion der Seidenfäden corrigirt.

Der Unterschied zwischen dem uncorrigirten Werthe und denen von Tab. 1 (ungefähr $^1/_{200}$ des Ganzen) zeigt zur Genüge, welch grossen Betrag die Correction bei Aufhängung an Seidenfäden in vielen Fällen erreichen kann. Dass in obiger Bestimmung bei Verwendung von 3 cm langen Seidenfäden der corrigirte Werth dem wahren so sehr nahe kommt, dürfte Zufall sein.

Kurze Aufhängung der Gewichte an Metalldrähten. Um den Einfluss der zweifachen selbständigen Schwingungen noch mehr zurückzudrängen, wurden die freien Längen der Aufhängedrähte durch Entfernung der auf dem

Magnete sitzenden Kappen verkürzt. Statt dieser wurden zwischen das Ende des Magnets und den Draht kleine Messingkeile eingeschoben, deren Trägheitsmoment wegen ihrer Kleinheit leicht mit mehr als genügender Genauigkeit berechnet werden konnte. Die Resultate der folgenden Tab. 2 sind mittelst solcher Keile erhalten. Die Buchstaben haben die Bedeutung von Tab. 1.

Tabelle 2.

Kurze Aufhängung an Metalldrähte.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$k_{[cm, g]}$	$K_{[cm, g]}$	d	δ	l_{cm}	Drahtdicke cm	T sec	Nr. der Gewichte
8,1394	13,4977	6,8721	13333,6	4667,4	−3,0	1,1	1,0	0,013	0,6	II
8,0968	13,4393	6,8700	13191,2	4667,6	−2,8	1,0	1,3	0,010	0,5	II
8,0896	10,5994	6,8696	6448,7	4671,8	+1,4	0,9	1,3	0,010	0,6	I
8,1052	13,4635	6,8773	13219,1	4668,1	−2,3	1,1	1,4	0,013	0,5	II
8,1040	13,4652	6,8794	13215,5	4669,1	−1,3	1,1	1,5	0,013	0,5	II
8,0891	10,6047	6,8734	6447,8	4672,0	+1,6	0,9	1,2	0,010	0,6	I
8,0940	10,6038	6,8704	6455,8	4672,1	+1,7	0,9	1,2	0,010	0,6	I
8,1381	13,4960	6,8741	13242,7	4670,7	+0,3	1,1	1,2	0,010	0,6	II
8,1140	10,6373	6,8825	6490,1	4674,1	+3,7	0,8	1,1	0,007	0,9	I
8,1032	13,4506	6,8721	13178,5	4668,1	−2,3	1,0	1,1	0,013	0,5	II
8,0957	10,6090	6,8715	6457,3	4667,7	−2,7	0,8	1,3	0,007	0,7	I
8,0969	13,4358	6,8721	13190,9	4675,6	−4,8	1,0	1,3	0,010	0,5	II
			Mittelwerth	4670,4						

Bestimmungen mit	Mittelwerthe aus Tab. 2	Mittelwerthe aus Tab. 1
Gewichten II (200 g) . . .	4669,2	4671,0
„ I (100 g) . . .	4671,2	4672,4
Draht 0,013 cm Dicke . . .	4667,9	4671,3
„ 0,010 „ „ . . .	4671,3	—
„ 0,007 „ „ . . .	4670,6	4673,9
Gewichten II an Draht 0,013	4667,9	4671,1
„ II „ „ 0,010	4670,0	—
„ I „ „ 0,010	4671,7	—
„ I „ „ 0,007	4670,6	—
„ I „ „ 0,013	—	4672,0
Gesammtmittel	4670,1	4671,9

Die vorstehende Zusammenstellung dient zur Vergleichung verschiedener Mittelwerthe aus Tab. 1 und 2. Alle Werthe gelten für den 16 cm langen Magnet ohne Aufhängestift und Spiegel.

Die Uebereinstimmung der Mittelwerthe aus beiden Beobachtungsreihen in Tab. 1 und 2 könnte besser sein. Die Differenz kommt zum Theil jedenfalls von dem nicht genau zu messenden Trägheitsmoment der beiden Kupferkappen, die bei den Messungen der ersten Tabelle auf dem Magnet sassen. Mit Sicherheit lässt sich ein zweiter Grund aus obigen Werthen feststellen. Infolge der Biegung des Aufhängedrahtes über der Ecke des Keiles oder der Kupferkappe wird derselbe sich nicht senkrecht hängen, sondern je nach der Grösse seines Durchmessers mehr oder weniger geneigt sein. Der gemessene Abstand beider Drähte wird darum kleiner sein als die Entfernung der Schwerpunkte beider Gewichte, was den Werth des berechneten Trägheitsmomentes zu klein erscheinen lässt. Da die Drähte bei den Versuchen der Tab. 1 länger waren, als bei denen der Tab. 2, so zeigt sich dieser Fehler hier auch grösser als dort. Ebendeshalb sind auch die mit den dicken Drähten erhaltenen Werthe im allgemeinen kleiner als die durch Benutzung der dünnen gewonnen. Es lässt demnach auch die bisherige Anwendung von Drähten zum Anhängen der Gewichte, obwohl sie bedeutende Vortheile gegenüber den gebräuchlichen Seidenfäden bietet, manche Unsicherheiten bestehen.

b) Bestimmung durch bifilare Aufhängung.[1]) Zur Controle der erhaltenen Resultate wurde der Magnet mittelst des bifilaren Verfahrens untersucht. Es sei

g die Schwerebeschleunigung,

m die ganze aufgehängte Masse vermehrt um die halbe Masse der Aufhängedrähte,

e_1 und e_2 der obere und untere Abstand der Aufhängedrähte,

l das Mittel aus beiden Drahtlängen, vermindert um $\varrho^2 \sqrt{2\pi E/m}$,

ϱ der Radius des Drahtes,

E der Elasticitätsmodul der Substanz,

---

1) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1883. p. 411. — Wied. Ann. 22. p. 411. 1884.

D_2 die Directionskraftsumme beider Drähte.
Die vollständige bifilare Directionskraft ist dann:

$$D = g\,m\frac{e_1 e_2}{4l} + \frac{2\pi}{5}\frac{\varrho^4 E g}{l} = g\,m\frac{e_1 e_2}{4l} + D_2,$$

und das Trägheitsmoment der angehängten Masse:

$$K = \frac{D t^2}{\pi^2},$$

t ist die Schwingungsdauer des Apparates.

unbelastet: $l = 267{,}317$ cm, $e_1 = 11{,}972$ „, $e_2 = 12{,}036$ „

durch den Magnet belastet: $l = 267{,}842$ cm, $e_1 = 11{,}972$ „, $e_2 = 12{,}036$ „

$g = 980{,}99$ [cm, g]
$\varrho = 0{,}043$ cm

Suspension	63,19 g
Magnet . .	216,13 „
Draht . . .	0,13 „
	$m = 279{,}45$ g

$$D_{\text{ohne Magnet}} = 980{,}99 \,.\, 63{,}32\,\frac{11{,}972 \,.\, 12{,}036}{4 \,.\, 267{,}317} + 0{,}7 = 8371{,}1 \text{ [cm, g]},$$

$$D_{\text{mit Magnet}} = 36893{,}2, \qquad t_{\text{unbelastet}} = 0{,}69052 \text{ Sec.}$$

$$t_1 = 1{,}15008 \text{ Sec.}, \qquad t_2 = 1{,}18060 \text{ Sec.},$$

t_1 und t_2 sind die Schwingungsdauern des Apparates, wenn der Nordpol des eingelegten Magnets 1) nach Norden, 2) nach Süden gerichtet ist.

Trägheitsmoment der Suspension 404,4 [cm, g]:

$$K = 4669{,}7 \text{ [cm, g]}.$$

c) Trägheitsmoment aus der Form berechnet. Um auch noch ein Urtheil über die Homogenität des untersuchten Stahlstabes zu erlangen, wurden die Dimensionen abgemessen und das Trägheitsmoment unter Voraussetzung der Cylinderform berechnet. Als Dicke des Stabes wurde das Mittel aus 3 Messungen, zwei an den Enden und eine in der Mitte, angenommen. Der Unterschied des Durchmessers an beiden Enden beträgt nur ungefähr 0,01 mm.

Länge des Stabes bei 15°	16,009 cm
Durchmesser	1,480 „
Masse	216,13 g
Masse des Stahles, der die Aufhängeöffnung füllen würde	1,10 „

daraus: $K = 4669{,}4$ [cm, g].

Diesem Werthe kommt natürlich bei der Frage nach dem wirklichen Trägheitsmoment nur sehr geringe Bedeutung zu, doch beweist er, dass grössere Dichteschwankungen des Materiales fehlen.

Die Uebereinstimmung der drei früher gefundenen Werthe ist eine befriedigende.

Mittelwerth aus Tab. 1	4671,9 [cm, g]
„ „ „ 2	4670,1
durch bifilare Aufhängung	4669,7
Hauptmittel:	4670,6 [cm, g].

2. Trägheitsmoment des 20 cm langen Stabes.

a) Gauss'sche Methode. — Da der gemessene Abstand der Schwerpunkte beider Gewichte nach der in Tab. 1 und 2 angewendeten Art der Aufhängung mit einem einseitigen, unbestimmbaren Fehler behaftet ist, so wurde der neu angefertigte längere Magnet an den Enden mit Messingplatten versehen, um den Draht in senkrechter Stellung befestigen zu können. Die einzelnen benutzten Drähte hatten fast genau gleiches Gewicht (im Mittel 0,004 g), und blieben nach Entfernung der Gewichte bei Beobachtung der Schwingungsdauer ohne Belastung an dem Magnet. Das Trägheitsmoment zweier Drähte 0,8 [cm, g] ist deshalb von den Resultaten der Tab. 3_a abgezogen worden.

Tabelle 3_a.

Gewichte an Metalldrähten. Drähte senkrecht festgeklemmt.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$K_{[cm,g]}$	d	δ	$l_{(cm)}$	Drahtdicke cm	T sec	Nr. der Gewichte
10,0063	11,6071	8,1292	9483,8	+0,4	2,0	1,5	0,007	0 9	I
10,0046	11,6040	8,1283	9486,6	+3,2	2,0	1,2	0,007	0,8	I
10,0049	14,3720	8,1340	9479,4	−4,0	2,6	1,3	0,007	1,3	II
10,0065	11,6139	8,1340	9483.8	+0.4	2,0	1,3	0.007	0.8	I
		Mittel	9483,4						

Um dieses Resultat mit den folgenden vergleichbar zu machen, wird davon subtrahirt:

1) das Trägheitsmoment von Spiegel und Aufhängestift 0,3
2) die Differenz der Trägheitsmomente der Endplatten für die Einklemmung von Draht und Seidenfäden 0,1

0,4

$$K = 9483{,}0\,[\text{cm, g}].$$

Bei den Versuchen der Tabelle 3_b und 3_c waren die Drähte durch doppelte Seidenfäden ersetzt, deren Abstand immer nahe 0,1 cm genommen wurde. Diese Aenderung hatte einen doppelten Zweck. Erstens wurden dadurch die selbständigen Pendelschwingungen der Gewichte möglichst gehindert, und zweitens konnte der Abstand der Gewichte wegen der Feinheit des verwendeten Seidenfadens genauer gemessen werden. Ausserdem ist es dadurch möglich, die Schwingungsdauer der Gewichte um ihre Axe auf eine beliebige Grösse zu bringen. Die Buchstaben der Tabelle 3 haben die gleiche Bedeutung wie in Tabelle 1 und 2.

Tabelle 3_b.

Gewichte an doppelten Seidenfäden.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$K_{[cm,g]}$	d	δ	$l_{(cm)}$	T sec	Nr. der Gewichte
10,0026	11,6195	8,1394	9483,9	+1,4	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3758	8,1384	9483,0	+0,5	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6200	8,1384	9477,5	−5,0	1,7	0,7	1,0	I
10,0025	11,6283	8,1444	9478,9	−3,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0015	14,3759	8,1401	9486,8	+4,3	2,2	0,6	1,3	II
10,0013	11,6260	8,1442	9483,1	+0,6	1,7	0,6	0,9	I
10,0023	14,3879	8,1453	9483,6	+1,1	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6269	8,1453	9486,1	+3,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3825	8,1427	9484,6	+2,1	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6251	8,1427	9480,9	−1,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3713	8,1361	9483,6*)	+1,1	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6141	8,1350	9480,9	−1,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3702	8,1340	9481,9	−0,6	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6284	8,1450	9480,5	−2,0	1,7	0,7	1,0	I
		Mittel	9482,5					

Gew. am gleichen Faden. Unter r ist der Mittelwerth der einzelnen Messungen.

*) Nach dem viertletzten Versuche riss der Aufhängedraht des Magnets.

Von diesem Mittelwerthe ist wieder das Trägheitsmoment des Kupferstiftes und des Spiegels 0,3 [cm, g] abzuziehen:

$$K = 9482{,}2 \text{ [cm, g]}.$$

Mittel der Bestimmungen mit Gewicht I [100 g] 9481,5
„ „ „ „ II [200 g] 9483,9.

Die Genauigkeit der Versuchsresultate mit dem grossen Magnet übertrifft, wie vorauszusehen war, jene mit dem kurzen um fast das Doppelte; die Uebereinstimmung der aus der letzteren Anordnung mit bifilaren Seidenfäden gewonnenen Werthe ist wieder grösser, als die durch Benutzung von Draht gefundene.

Es zeigt dies mit Sicherheit einerseits auf die geringere Verwendbarkeit des Drahtes gegenüber der des Seidenfadens bei bifilarer Anwendung, dann ist es aber auch ein Beweis, dass die auf p. 9 und 10 erwähnten, aus selbständigen Pendelbewegungen entstehenden Fehler einen merkbaren Betrag erreichen. Neben den Vortheilen besteht aber auch die Unbequemlichkeit, dass der Abstand der Aufhängefäden von vorne und von rückwärts gemessen werden muss, am besten in der Nähe der (dünnen) Aufhängehacken. Ausserdem ergibt die Vergleichung der Endresultate aus Tab. 3_a und 3_b, dass bei senkrechter Einklemmung die früher beobachteten einseitigen Fehler fortfallen.

Fehler infolge der Beweglichkeit des Aufhängepunktes.

Es wurde jetzt versucht, ob nicht auch noch die aus der Beweglichkeit des Aufhängepunktes eines schwingenden Magnets entstehenden Unsicherheiten (p. 9) theilweise zu beseitigen möglich sei. Zu diesem Zwecke wurde eine weiche Federfahne über dem Schwingungskasten so festgeklemmt, dass der Aufhängedraht an derselben einen geringen Widerstand bei einer vorkommenden Bewegung finden musste. Die hier beobachtete grössere Dämpfung war sehr wenig von der früheren verschieden. Die Tab. 3_c enthält die gefundenen Resultate unter den gleichen Buchstaben wie früher.

Für die gleiche Combination der Theile wie in Tab. 3_a und 3_b findet man noch, durch Subtraction von 0,3 (Suspension):

$$K = 9481{,}7.$$

Die beiden vorher gefundenen Werthe waren:

9483,0,
9482,2.

Diese Uebereinstimmung ist eine ganz gute.

Tabelle 3c.

Gewichte an doppelten Seidenfäden, Schwingungsaxe des Magnets unveränderlich.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$K_{(cm, g}$	d	δ	$l_{(cm)}$	T	Nr. der Gewichte
10,0023	11,6228	8,1412	9480,9	−1,1	1,7	0,6	1,0	I
10,0023	14,3767	8,1389	9483,0	+1,0	1,2	0,6	1,2	II
10,0023	11,6304	8,1467	9482,1	+0,1	1,7	0,6	1,0	I
10,0023	11,6325	8,1483	9482,6	+0,6	1,7	0,6	1,0	I
10,0023	11,6391	8,1527	9481,6	−0,4	1,7	0,6	1,0	I
		Mittel:	9482,0					

b) Bestimmung durch bifilare Aufhängung (p. 30) — Auch dieser Magnet wurde nach der Bifilarmethode in derselben Weise mit dem von der früheren Messung her unveränderten Apparate untersucht. Die Constanten desselben ohne Belastung waren die gleichen, mit Belastung folgende:

l = 268,010 cm		Suspension	63,189 g
e_1 11,979 „		Magnet .	280,610 „
e_2 12,037 „		Draht . .	0,129 „
		m =	343,928 g

$t_1 = 1{,}489\,45$ sec $\quad t_2 = 1{,}444\,26$ sec.

$K = 9481{,}9$ [cm, g].

Auch hier ist die Uebereinstimmung mit den früheren Werthen befriedigend.

c) Rechnung aus den Dimensionen. — Die Form dieses 20 cm langen Magnetstabes ist zur Bestimmung des Trägheitsmomentes ungünstiger, als die des früher untersuchten 16 cm langen Magnets. Seine cylindrische Gestalt ist weniger vollkommen, an den Enden sitzen Messingplatten, er ist an beiden Enden zur Befestigung der Platten angebohrt und besitzt 2 Nuten für die Suspension des Bifilarapparates. Ausserdem war der Magnet zum Schutze gegen den Rost mit einer Lackschicht versehen, die bei den vorhergehenden Versuchen mit gemessen wurde, sodass das Resultat der jetzigen Rechnung auf geringere Zuverlässsigkeit Anspruch machen kann, als das von p. 32.

Länge des Stabes bei 15°	20,006	cm
Halbmesser	0,758	„
Gewicht ohne Platten und Schrauben	279,86	g
Gewicht eines Volumens Stahl, das die Aufhängebohrung füllen würde	0,93	„
Gewicht der Messingplatten und Schrauben. .	0,646	„
Halber Abstand derselben	10,05	cm
Gewicht des Weingeistlackes	0,10	g
Trägheitsmoment „	3,3	„

Daraus findet man das Trägheitsmoment unter Annahme der völlig cylindrischen Form:

9474,2 [cm, g];

unter Berücksichtigung des ungleichmässigen Durchmessers (p. 22): 9479,2 [cm, g];

unter möglichster Berücksichtigung aller Unvollkommenheiten der Form: 9479,0 [cm, g].

Man kann die Unsicherheit des berechneten Werthes auf etwa $^1/_{2000}$ schätzen infolge mangelhafter Messung der Schraubenlöcher, Nuten und der Aufhängebohrung. Die Uebereinstimmung macht die Homogenität des Materiales wahrscheinlich.

Einige Vorbereitungsmaassregeln bei Bestimmung von Trägheitsmomenten.

Eine grössere Anzahl von verschiedenen Verhältnissen, die bei genaueren Messungen des Trägheitsmomentes durch Belastung berücksichtigt werden müssen, stellte Gauss zusammen, und Goldschmidt theilte sie in den „Resultaten des magnetischen Vereins“ p. 131. 1840 mit. Ausser jenen ergaben sich, zum Theil durch die veränderte Aufhängungsweise hervorgerufen, mit der Zeit noch einige Fehlerquellen, deren Beseitigung in den beschriebenen Versuchen angestrebt wurde.

Zunächst muss der Magnetismus des zu messenden Stabes möglichst constant gemacht werden, was nach den Vorschriften von Strouhal und Barus[1]) durch mehrmaliges Magnetisiren mit abwechselndem Kochen erreicht wird. Den Magnet hänge man mittelst eines harten Messingdrahtes von

1) Strouhal und Barus, Wied. Ann. **20.** p. 683. 1883.

solcher Länge auf, dass die möglichen Variationen des Torsionscoëfficienten unter $^1/_{10000}$ bleiben. Ein zu langer Faden erschwert die Beruhigung und bedroht die Stabilität der Drehungsaxe. Die vorher auf Magnetismus zu prüfenden Belastungscylinder sollen mindestens so schwer sein, dass durch dieselben das Trägheitsmoment um mehr als das Doppelte bis zum Dreifachen vermehrt wird. Oft wird ein bedeutend (bis zu zehnmal) grösseres Trägheitsmoment durch Belastung angerathen, doch ist zu berücksichtigen, dass die durch pendelnde Bewegung grosser Belastungsmassen hervorgerufene Inconstanz des Aufhängepunktes meistens vielmehr stören wird, als man an Genauigkeit der Beobachtung dadurch gewinnt. Aus demselben Grunde sind bei gleicher Masse kürzere Cylinder den langen vorzuziehen. Vermindert wird die Störung ferner durch Aufhängung der Belastung an Metalldrähten, statt an den gebräuchlichen Seidenfäden, noch besser durch Anwendung doppelter Seidenfäden, die ein spitzwinkliches Trapez bilden. Ein weicher elastischer Körper, durch den der Aufhängedraht in der Nähe des Magnets mit wenig Reibung geht, drängt den Einfluss dieser Störungen noch mehr zurück.

Die Schwingungsdauer mit Belastung wird direct beeinflusst durch die zweifachen selbständigen Schwingungen der Cylinder. Die pendelnden Schwingungen werden durch die von Beling aufgestellte Gleichung berücksichtigt, die Drehungen um ihre Axe lassen sich ebenfalls leicht, wie aus p. 19 ersichtlich, in Rechnung setzen. Unter zweierlei Umständen weicht der deshalb corrigirte Werth von dem auf gewöhnlichem Wege gefundenen wenig ab, und sind zugleich die Schwingungsdauern mit Belastung leicht genau messbar. Einmal bei Anwendung von Gewichten, deren eigenes Trägheitsmoment gegen das des Magnets klein, während zugleich die Torsionsdirectionskraft ihrer Aufhängefäden (Metallfäden, bifilare Seidenfäden) gross ist. Zweitens durch Benutzung von Gewichten mit grossem Trägheitsmoment bei kleiner Torsionskraft der Aufhängefäden (dünner Seidenfaden). An der Hand der angestellten Versuche könnte man vielleicht für den ersten Fall Cylinder empfehlen, deren

Höhe dem doppelten Durchmesser gleich ist, für den zweiten Fall ist der Durchmesser derselben nur dadurch beschränkt, dass das durch Ausmessung und Rechnung bestimmte Trägheitsmoment der Cylinder um ihre Axe keine den Endwerth beeinflussende Ungenauigkeit enthalten soll. Da Kupfer fast völlig homogen ist, lässt sich die geforderte Grenze ziemlich weit ausdehnen.

Zum Schlusse möchte ich meinem hochverehrten, langjährigen Lehrer Hrn. Prof. F. Kohlrausch, auf dessen Anregung gegenwärtige Untersuchung entstand, meinen besten Dank darbringen für die stetige gütige Förderung vor und während der Arbeit.

Würzburg, phys. Laborat. 1885.